

X Rzeszowski Konkurs Matematyczny dla Gimnazjalistów

Etap miejski

28 maja 2011 r.

Klucz odpowiedzi

Zadanie 1. (0 – 3 pkt.)

W pewnym sklepie 16 gum do żucia kosztuje dokładnie tyle złotych, ile gum do żucia można kupić za jedną złotówkę. Ile groszy kosztuje jedna guma do żucia?

ROZWIĄZANIE:

x – cena jednej gumy w groszach

wtedy za złotówkę można kupić $\frac{100}{x}$ gum do żucia **1 pkt**

zatem $\frac{16x}{100} = \frac{100}{x}$ **1 pkt**

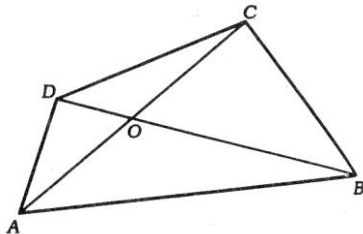
stąd $x = 25$ groszy. **1 pkt**

Zadanie 2. (0 – 4 pkt.)

Wiadomo, że pola trójkątów AOB, BCO, COD wynoszą odpowiednio: 1 cm^2 , 2 cm^2 , 4 cm^2 , gdzie O jest punktem przecięcia przekątnych AC i BD w czworokącie wypukłym ABCD. Wyznacz pole czworokąta ABCD.

ROZWIĄZANIE:

Sporządzenie rysunku z oznaczeniami i zauważenie:



$$P_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} \cdot |AO| \cdot h_1$$

$$P_{\Delta BCO} = \frac{1}{2} \cdot |OC| \cdot h_1$$

$$\frac{P_{\Delta AOB}}{P_{\Delta BCO}} = \frac{|AO|}{|OC|}, \text{ stąd } \frac{|AO|}{|OC|} = \frac{1}{2}$$

2 pkt

Zauważenie:

$$P_{\Delta DOA} = \frac{1}{2} \cdot |AO| \cdot h_2$$

$$P_{\Delta DOC} = \frac{1}{2} \cdot |OC| \cdot h_2, \quad \frac{P_{\Delta DOA}}{P_{\Delta DOC}} = \frac{|AO|}{|OC|} = \frac{1}{2}$$

1 pkt

Ułożenie i rozwiązanie równania:

$$\frac{P_{\Delta DOA}}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P_{\Delta DOA} = 2 \text{ cm}^2$$

Obliczenie pola czworokąta:

$$P = 1 + 2 + 2 + 4 = 9 \text{ cm}^2$$

1 pkt

Zadanie 3. (0 – 4 pkt.)

Woda stanowi 84% wagi spragnionego wielbłąda. Jeśli ten wielbłąd się napije, jego waga wynosi 800 kg, a woda stanowi 85% jego ciężaru. Ile waży spragniony wielbłąd?

ROZWIĄZANIE:

x – waga tych składników, które nie są wodą

m – szukana waga wielbłąda

1 pkt

Obliczenie tych składników, które nie są wodą dla wielbłąda, wtedy kiedy się napije:

$$x = 15\% \cdot 800 = 120 \text{ kg}$$

lub

$$85\% \cdot 800 = 680 \text{ kg}$$

$$800 - 680 = 120 \text{ kg}$$

1 pkt

Obliczenie tych składników, które nie są wodą dla spragnionego wielbłąda:

$$x = 16\% \cdot m$$

1 pkt

Obliczenie szukanej wagi wielbłąda i odpowiedź z jednostką.

$$m = \frac{100}{16} \cdot 120 = 750 \text{ kg}$$

Odpowiedź: Spragniony wielbłąd waży 750 kg.

1 pkt

Zadanie 4. (0 – 5 pkt.)

Z dwóch jednakowych płytek w kształcie trójkąta prostokątnego obwodzie 40 można złożyć trójkąt o obwodzie 50 albo trójkąt o obwodzie 64, albo deltoid. Oblicz długości przekątnych tego deltoidu.

ROZWIĄZANIE:

x, y – długości przyprostokątnych trójkąta

z – długość przeciwprostokątnej

zauważenie, że gdy połączymy płytki wzdłuż boku y , to otrzymamy trójkąt

o obwodzie $x + 2z$, gdy zaś połączymy je wzdłuż boku x , powstanie trójkąt

o obwodzie $2y + 2z$

1 pkt

Zapisanie układu równań:

$$\begin{cases} 2x + 2z = 50 \\ 2y + 2z = 64 \\ x + y + z = 40 \end{cases}$$

1 pkt

Rozwiązanie układu równań:

$$\begin{cases} x = 8 \\ y = 15 \\ z = 17 \end{cases}$$

1 pkt

Jedna z przekątnych deltoidu ma długość 17.

Obliczenie pola deltoidu:

$$P = 2 \cdot 0,5 \cdot 8 \cdot 15 = 120$$

1 pkt

Wyznaczenie długości drugiej przekątnej deltoidu (d):

$$120 = 0,5 \cdot 17 \cdot d$$

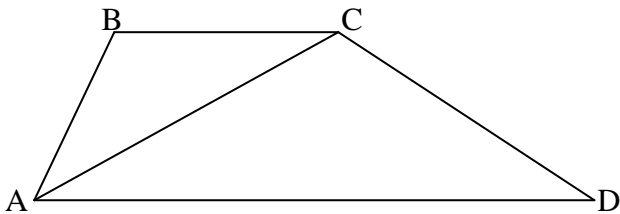
$$d = \frac{240}{17} = 14\frac{2}{17}$$

1 pkt

Zadanie 5. (0 – 5 pkt.)

W trapezie ABCD, w którym $AD \parallel BC$ zachodzą równości: $AB = BC$, $AC = CD$ oraz $BC + CD = AD$. Wyznacz miary kątów tego trapezu.

ROZWIĄZANIE:



Sporządzenie rysunku z oznaczeniami oraz zauważenie, że trójkąty ABC i ACD są równoramienne i $|\angle CAB| = |\angle ACB| = \alpha$ oraz $|\angle CAD| = |\angle ADC| = \alpha$ **2 pkt**

Narysowanie prostej równoległej do odcinka AB przechodzącej przez punkt C przecinającej bok AD w punkcie E. **1 pkt**

Zatem kąt $|\angle BAD| = |\angle CED| = 2\alpha$.

W trójkącie EDC mamy $ED = AD - AE = AD - BC = CD$ więc kąty CED i ECD są równe. **1 pkt**

$$5\alpha = 180^\circ$$

$$\alpha = 36^\circ$$

Odpowiedź: Trapez ma kąty: $36^\circ, 72^\circ, 108^\circ, 144^\circ$. **1 pkt**